BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2009

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПРОИЗВОДНЫМИ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ НЕКЛАССИЧЕСКОГО ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

М.А.НУРМАМЕДОВ

Азербайджанская Государственная Нефтяная Академия

При исследовании краевых задач для уравнений высокого порядка, когда коэффициенты при старших производных имеют несколько линий изменения типа, в многомерной области возникают некоторые затруднения. В данной работе коэффициенты при старших производных имеют все- возможными знаки определенности, поэтому в рассматриваемый класс уравнений, в частности, входят эллиптические, вырождающийся в эллиптическое, смешанно-составного типа и, особенно, с меняющимся направлением времени типы уравнений.

С помощью методов функционального анализа, « ε - регуляризации» и априорных оценок, а также при некоторых ограничениях на коэффициенты и правую часть уравнений доказывается разрешимость краевой задачи в весовых пространствах С.Л.Соболева.

В последние годы вниманию ряда математиков привлекли краевые задачи для уравнений высокого порядка, которые не подходят под обычную классификацию. Их часто называют неклассическими уравнениями математической физики [2], [6], [7], [10]. А данная работа наиболее близка к работам автора [4], [5], [6], [7].

Пусть Ω - ограниченная область в R^n с гладкой границей $\partial\Omega$, включающая в себе часть гиперплоскости $x_n = 0$, где $x = (x_1,...,x_n) \in \Omega$. Положим $D = \Omega \times (-T,T)$ ($T > 0$).

В области D рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^{2m} K_i(x,t) D_t^i u + (-1)^{m+1} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} D_x^\alpha \left(a_{\alpha\beta}(x) D_x^\beta u\right) + \sum_{|\alpha|\le 2m-1} a_\alpha(x,t) D_x^\alpha u + c(x,t) u = f(x,t), \quad (1)$$

где $D_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $\dfrac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n)$ - мультииндекс, и $m \ge 1$ - целое число. Всюду ниже будем предполагать, что коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие в $\overline{D}$. Коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют следующим условиям:

1) $tK_{2m}(x,t) > 0$ при $t \ne 0$, $t \in [-T,T]$,

2) $\sum\limits_{|\alpha|,|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x)\xi^{\alpha+\beta} < 0$ при $x_n > 0$, $x=(x_1,\dots,x_n)\in\Omega$, $\forall \xi^\alpha = \left(\xi_1^{\alpha_1}, \xi_2^{\alpha_2}, \dots, \xi_n^{\alpha_n}\right)\in R^n$,

$\sum\limits_{|\alpha|,|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x)\xi^{\alpha+\beta} > 0$ при $x_n < 0$, $x=(x_1,\dots,x_n)\in\Omega$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i = m$, $\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j = m$.

Через $\vec{n} = (n_t, n_1, .. n_n)$ обозначим вектор внутренней нормали к границе области D.

Положим

$$S_0 = \left\{(x,t)\in S : \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x) n^{\alpha+\beta} = 0\right\},$$

$$S^+ = \partial D^+ \times [-T, T], \quad S^- = \partial D^- \times [-T, T],$$

$$P_{-T}^+ = \left\{(x,-T) : (-1)^m K_{2m}(x,-T) < 0 \text{ при } x_n > 0\right\},$$

$$\overline{P_{-T}^+} = S_1, \quad \overline{P_{-T}^-} = S_2, \quad \overline{P_T^+} = S_3, \quad \overline{P_T^-} = S_4,$$

$$P_{-T}^- = \left\{(x,-T) : (-1)^m K_{2m}(x,-T) < 0 \text{ при } x_n < 0\right\},$$

$$P_T^+ = \left\{(x,T) : (-1)^m K_{2m}(x,T) > 0 \text{ при } x_n > 0\right\},$$

$$P_T^- = \left\{(x,T) : (-1)^m K_{2m}(x,T) < 0 \text{ при } x_n < 0\right\},$$

$$D^+ = D \cap \{x_n > 0\}, \quad D^- = D \cap \{x_n < 0\},$$

Краевая задача. Найти решение уравнения (1) в области $\overline{D}$ такое, что

$$u\big|_{S\setminus S_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial^i u}{\partial n^i}\right|_S = 0, \quad i = 1,2,\dots,m-1, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial^i u}{\partial t^i}\right|_{t=T} = 0, \quad \left.\frac{\partial^i u}{\partial t^i}\right|_{t=-T} = 0, \quad i = 0,2,\dots,m-1, \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial^m u}{\partial t^m}\right|_{S_2} = 0, \quad \left.\frac{\partial^m u}{\partial t^m}\right|_{S_3} = 0. \tag{4}$$

В случае, когда $m = 1$, краевые задачи для уравнения (1) изучались в [4], [5] (также см. [7]). В данной работе при некоторых ограничениях на коэффициенты уравнения (1) докажем обобщенную разрешимость краевой задачи (1) – (4).

§ 1. Некоторые общепринятые обозначения.

R^n - евклидово пространства размерности n, $(u,\upsilon)_{0,D}, \|u\|_{0,D}$ - скалярное произведение и норма в пространстве $L_2(D)$, соответственно.

Пространство $L_p(D)$, $1 \le p < \infty$ - банахово пространство, состоящее из всех измеримых в D функций, имеющих конечную норму $\|u\|_{L_p(D)} = \left(\int\limits_D |u|^p dD\right)^{\frac{1}{p}}$,

$C_0^\infty(D)$- множество бесконечно дифференцируемых, финитный в D функций.

Пусть ℓ - целое неотрицательное число и $1 \le p < \infty$. Будем говорить, что функция $u \in W_p^{\ell}(\Omega)$, если $u \in L_p(\Omega)$ и имеет в D всевозможные обобщенные производные до порядка ℓ включительно, также принадлежащие $L_p(D)$, причем этот класс превращается в нормированное пространство, с нормой $\|u\|_{W_p^{\ell}(D)} = \left(\int\limits_D \sum\limits_{|\alpha| \le \ell} |D^{\alpha} u|^p \, dD \right)^{\frac{1}{p}}$.

$W_2^{m,s}(D)$ анизотропное пространство С.Л.Соболева с нормой [3], [8]:

$$\|u\|_{m,s}^2 = \int\limits_D \sum_{|\alpha| \le m} \left[(D_x^{\alpha} u)^2 + (D_t^s u)^2 \right] dD .$$

Обозначим через C_L класс бесконечно дифференцируемых функций в $\overline{D}$, удовлетворяющих условиям (2) – (4), а через $H_{1,L}(D), H_{2,L}(D)$ - весовые пространства С.Л.Соболева, получаемые замыканием класса C_L по нормам:

$$\|u\|_{H_{1,L}(D)}^2 = \int\limits_D \left\{ \left(\frac{\partial^m u}{\partial t^m} \right)^2 + \left| \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x) D_x^{\alpha} u D_x^{\beta} u \right| + u^2 \right\} dD + \|u\|_{m-1,D}^2 . \qquad (5)$$

$$\|u\|_{H_{2,L}(D)}^2 = \int\limits_D \left\{ \left(\frac{\partial^{2m} u}{\partial t^{2m}} \right)^2 + \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} |a_{\alpha\beta}(x)| (D_x^{2m-1} u_t)^2 + \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} (a_{\alpha\beta}(x) D_x^{\alpha} u D_x^{\beta} u)^2 + u^2 \right\} dD + \|u\|_{m-1,D}^2 ,$$

соответственно.

§ 2. Первая априорная оценка

Имеет место

Лемма 1. Пусть $\min\limits_D \{ |a_0(x,t)|, |c(x,t)| \}$ достаточная большая и выполнены условия:

1) $(-1)^{m+1} \left[2K_{2m-1}(x,t) + (1-2m) \dfrac{\partial K_{2m}(x,t)}{\partial t} \right] \le -\delta < 0$;

2) $\delta > 0$; $x_n c(x,t) > 0$ при $x_n \ne 0$, $(x,t) \in D$; 3) $\sum\limits_{|\alpha|,|\beta|=m} |D_{x_n} a_{\alpha\beta}| \le C_1 \sum\limits_{|\alpha|,|\beta|=m} |a_{\alpha\beta}(x)|$;

4) $\sum\limits_{|\alpha|,|\beta|=m} |a_{\alpha}(x,t)| \le C_1 \sum\limits_{|\alpha|,|\beta|=m} |a_{\alpha\beta}(x)|$; 5) $c_t \le 0$, $(x,t) \in D$;

6) $\sum\limits_{|\alpha|,|\beta|=m} \left(a_{2m-1}(x,t) - D_{x_n}^{\alpha} a_{\alpha\beta}(x) \right)^2 \le M \sum\limits_{|\alpha|,|\beta|=m} |a_{\alpha\beta}(x)|$;

7) $\sum\limits_{|\alpha|=2m-2} a_{\alpha}(x,t) \xi^{\alpha} \le -M |\xi|^{2m-2}$, $M > 0$, $\sum\limits_{|\alpha|=2m-2} a_{\alpha t}(x,t) \xi^{\alpha} \le 0$

и пусть $b(x,t) = -t x_n - M_1$, где M_1 - достаточно большая константа. Тогда для всех функций $u(x,t)$ из класса $C_L(D)$ имеет место неравенство

$$\left(Lu, bu_t\right)_{0,D^+} + \left(Lu, bu_t\right)_{0,D^-} \geq m_1 \|u\|^2_{H_{1,L}(D)}. \qquad (6)$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл: $J \equiv 2\int\limits_{D^+} Lu \cdot bu_t dD^+ + 2\int\limits_{D^-} Lu \cdot bu_t dD^-$.

Применяя к нему неравенство Коши, лемму Гординга [1] и учитывая условия, влекущие не- отрицательность граничных интегралов, а также принимая во внимание условия леммы 1,
получим неравенство (6).

Так как $\sum\limits_{|\alpha|,|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x)\xi^{\alpha+\beta} \neq 0$ при $x_n \neq 0$, то, в силу теорем вложения С.Л.Соболева, функции из пространства $H_{2,L}(D)$ будут удовлетворять граничным условиям (2) – (4).

Определение 1. Регулярным решением задачи (1) – (4) будем называть функцию $u(x,t) \in H_{2,L}(D)$, удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду в D.

Теорема 1. Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда задача (1) – (4) имеет единственно регулярное решение.

§ 3. Доказательство разрешимости задачи (1) – (4)

Для доказательства разрешимости краевой задачи (1) – (4) воспользуемся методом « ε - регуляризации» и тем, что гиперплоскость $x_n = 0$ является характеристической для уравнения (1). Поэтому, краевую задачу (1) – (4) разобьем на две задачи для уравнения (1) в областях D^+ и D^-, и поставим задач и следующим образом.

Краевая задача 1. Найти решение уравнения (1) в области D^+, удовлетворяющее краевым условиям

$$\left.\frac{\partial^i u}{\partial n^i}\right|_{S^+} = 0, \quad i = 0,1,\ldots,m-1, \qquad (7)$$

$$\left.\frac{\partial^i u}{\partial t^i}\right|_{S_3} = \left.\frac{\partial^m u}{\partial t^m}\right|_{S_3} = 0, \quad i = 0,1,\ldots,m-1, \qquad (8)$$

$$\left.\frac{\partial^i u}{\partial t^i}\right|_{S_1} = 0, \quad i = 0,1,\ldots,m-1. \qquad (9)$$

Также, как и выше, обозначим через $C_{L'}(D^+)$ класс функций, бесконечно дифференцируемых в замкнутой области D^+, удовлетворяющих краевым условиям (7) – (9).

Имеет место

Лемма 2 *(Первая априорная оценка)*. Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда для любой функции $u(x,t) \in C_{L'}(D^+)$ справедливо неравенство $\left(Lu, bu_t\right)_{0,D^+} \geq m_3 \|u_{at}\|^2_{H_{1,L}(D^+)}$.

Доказательство леммы 2 проводится совершенно аналогично доказательству леммы 1.

Обозначения через $H_{1,L}\left(D^{+}\right)$, $H_{2,L}\left(D^{+}\right)$ замыкания класса $C_{L'}\left(D^{+}\right)$ по нормам (5), соответственно.

Определение 2. Назовем функцию регулярным решением краевой задачи (1), (7) – (9), если она является обобщенным решением уравнения (1) и удовлетворяет (1) почти всюду в D. В дальнейшем нам понадобится следующая вспомогательная задача. Рассмотрим в области D^{+} « ε - регуляризированные» уравнения неклассического типа:

$$L_\varepsilon u_\varepsilon=\sum_{i=1}^{2m}K_i(x,t)D_t^i u_\varepsilon+(-1)^{m+1}\sum_{|\alpha|,|\beta|=m}D_x^\alpha\left(a_{\alpha\beta}(x)D_x^\beta u\right)-(-1)^m\varepsilon\Delta^m u_\varepsilon+$$

$$+\sum_{|\alpha|=2m-1}a_\alpha(x,t)D_x^\alpha u_\varepsilon+c(x,t)u_\varepsilon=f(x,t). \tag{10}$$

Краевая задача 2. Найти решение уравнения (10) в области D^{+}, удовлетворяющее краевым условиям:

$$\left.\frac{\partial^i u_\varepsilon}{\partial n^i}\right|_{S^+}=0,\quad i=0,1,\ldots,m-1, \tag{11}$$

$$\left.\frac{\partial^j u_\varepsilon}{\partial t^j}\right|_{S_3}=\left.\frac{\partial^m u_\varepsilon}{\partial t^m}\right|_{S_3}=0,\quad j=0,1,\ldots,m-1, \tag{12}$$

$$\left.\frac{\partial^i u_\varepsilon}{\partial t^i}\right|_{x_n=0}=0,\quad \left.\frac{\partial^i u_\varepsilon}{\partial t^i}\right|_{S_1}=0,\quad i=0,1,\ldots,m-1. \tag{13}$$

Имеет место

Теорема 2 *(о разрешимости краевой задачи (1),(7)–(9))*. Пусть выполнены условия леммы 1, а также

$$\left|\sum_{|\alpha|,|\beta|=m}D_x^\alpha a_{\alpha\beta}(x)D_x^\beta a_{\beta\alpha}\right|\le M\sum_{|\alpha|,|\beta|=m}\left|a_{\alpha\beta}(x)\right|,\qquad \sum_{|\alpha|=2m-2}a_\alpha(x,t)\xi^\alpha\le -M|\xi|^{2m-2},\ M>0,$$

$$\sum_{|\alpha|=2m-2}a_{\alpha t}(x,t)\xi^\alpha\le -M|\xi|^{2m-2},\ \forall\xi^\alpha=\left(\xi_1^{\alpha_1},\xi_2^{\alpha_2},\ldots,\xi_n^{\alpha_n}\right)\in R^n,$$

$$(-1)^m\left[2K_{2m-1}(x,t)-(1-2m)\frac{\partial K_{2m}}{\partial t}\right]\le-\delta<0,\quad \delta>0,\qquad f(x,t),f_t\in L_2\left(D^{+}\right).$$

Тогда существует и притом единственно регулярное решение задачи (1), (7) – (9) из пространства $H_{2,L}\left(D^{+}\right)$.

Доказательство. Для функций $u_\varepsilon(x,t)\in W_2^{2m}\left(D^{+}\right)$, являющихся решением краевой задачи (10) – (13), на основании неравенства Гординга [1], получаем оценки:

$$\left((-1)^m\varepsilon\Delta^m u_\varepsilon,bu_{\varepsilon t}\right)_{0,D^+}\ge\varepsilon\|u_\varepsilon\|^2_{W_2^m(D^+)}-C_2\|u_\varepsilon\|^2_{0,D^+},$$

$$\left(L_\varepsilon u_\varepsilon,bu_{\varepsilon t}\right)_{0,D^+}\ge m_3\|u_\varepsilon\|^2_{W_2^m(D^+)},\qquad \|f\|_{0,D^+}\ge m_4\|u_\varepsilon\|^2_{W_2^m(D^+)},\ \forall u_\varepsilon\in C_{L'_\varepsilon(D^+)}, \tag{14}$$

где константы m_3, m_4 не зависят от ε и $u(x,t)$. Тогда для функций $u_\varepsilon(x,t) \in W_2^m(D^+)$, являющихся решением краевой задачи (10) – (13), справедливы априорные оценки:

$$(L_\varepsilon u_\varepsilon, bu_{\varepsilon t})_{0,D^+} \geq m_5 \int_{D^+} \left\{ \left(D_t^m u_\varepsilon\right)^2 + \varepsilon \left(\Delta^{\frac{m}{2}} u_\varepsilon \right)^2 + \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \left| a_{\alpha\beta}(x) D_x^\alpha u_\varepsilon D_x^\beta u_\varepsilon \right| \right\} dD^+ + \|u_\varepsilon\|_{W_2^{m-1}(D^+)}, \quad (15)$$

где константа m_5 не зависит от ε.

Доказательство этого утверждения проводится так же, как в и лемме 1. Далее, возьмем функцию $\xi_1(t) \in C^\infty(-T,T)$ и такую, что

$$\xi_1(t) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad t \in (-T, -\eta), \ \dfrac{T}{2} > \eta > 0, \\ \leq 1, & \text{при} \quad t \in \left(-T, -\dfrac{\eta}{2}\right], \\ 0, & \text{при} \quad t \in \left(-\dfrac{\eta}{2}, T\right). \end{cases}$$

Затем рассмотрим семейство функций $V_\varepsilon(x,t) = \xi_1(t) u_\varepsilon(x,t)$. Очевидно, что удовлетворяют, соответственно, уравнениям:

$$L_\varepsilon V_\varepsilon = \xi_1 f_1 + 2K_{2m-1} D_t^m \xi_1(t) D_t^m u_{\varepsilon t} + \xi_1 K_{2m-1} D_t^{2m-1} u_\varepsilon + \ldots = F_\varepsilon(x,t), \quad (16)$$

где точками обозначены младшие, подчиненные члены.

Так как семейство функций $F_\varepsilon(x,t)$ равномерно по ε ограничено в пространстве $L_2(D^+)$ и кроме того, не трудно видеть, что в области $D^+_{\frac{\eta}{2}} = \left\{ x \in D, \ -T < t < -\dfrac{\eta}{2} \right\}$ уравнение $L_\varepsilon V_\varepsilon = F_\varepsilon$ строго эллиптического типа, поэтому мы можем умножить уравнение (16) на $-V_{\varepsilon t}$ и проинтегрируем по частям в области D^+. Применяя неравенство Коши, лемму Гординга [1] и учитывая условия, влекущие неотрицательность граничных интегралов, на основании априорных оценок (14), (15) из условий теоремы 1, получаем, следующую априорную оценку:

$$\|F_\varepsilon\|_{0,D^+} \geq \int_{D^+} \left\{ \left(D_t^{2m} V_\varepsilon\right)^2 + \left| \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x) D_x^\alpha V_{\varepsilon t} D_x^\beta V_{\varepsilon t} \right| + \left(D_t^m V_\varepsilon\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \left| a_{\alpha\beta}(x) - \varepsilon \right| \left(D_x^{2m} V_{\varepsilon t}\right)^2 + V_\varepsilon^2 \right\} dD^+ + \|V_\varepsilon\|^2_{m-1,D^+}.$$

Так как $\|F_\varepsilon\|_{0,D^+}$ равномерно ограничена по ε, то из представления функций $V_\varepsilon(x,t)$, получим справедливость следующее неравенство

$$\|f\|_{0,D^+} \ge m_5 \int\limits_{D^+_{\frac{\eta}{2}}} \left\{ \left(D_t^{2m} u_\varepsilon\right)^2 + \left| \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x) D_x^\alpha u_{\varepsilon t} D_x^\beta u_{\varepsilon t} \right| + \left(D_t^m u_\varepsilon\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \left| a_{\alpha\beta}(x) - \varepsilon \right| D_x^{2m} u_{\varepsilon t} + u_\varepsilon^2 \right\} dD^+ + \|u_\varepsilon\|^2_{m-1,D^+}, \qquad (17)$$

где константа m_5 не зависит от ε.

Теперь возьмем функцию $\xi_2(t) \in C^\infty(-T,T)$ такую, что $0 \le \xi_2(t) \le 1$ и

$$\xi_2(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } -T < t < -2\eta, \\ 1, & \text{при } -\eta < t < T. \end{cases}$$

Тогда функции $\varphi_\varepsilon = \xi_2(t) u_\varepsilon(x,t)$ удовлетворяют, соответственно, уравнениям

$$L_\varepsilon \varphi_\varepsilon = \xi_2 f + 2K_{2m-1} D_t^m \xi_2(t) D_t^m u_\varepsilon + \xi_2(t) K_{2m-1} D_t^{2m-1} u_\varepsilon + \ldots = \Phi_\varepsilon(x,t),$$

где точками обозначены младшие, подчиненные члены.

Так как производная $D_t^m \xi_2(t)$ отличается от нуля только на интервале $-2\eta < t < -\eta$, а также, по выше доказанному, $D^m u_\varepsilon, D^{2m} u_\varepsilon$ равномерно ограничены по ε в пространстве $L_2\left(\widetilde{D}_\eta^+\right)$, где $\widetilde{D}_\eta^+ = \{x \in D, -2\eta < t < -\eta\}$, то мы можем утверждать, что функции $\Phi_\varepsilon(x,t), \Phi_{\varepsilon t}(x,t)$ равномерно ограничены по ε в пространстве $L_2\left(D^+\right)$.

Далее, взяв конечные разности по переменной t от функций

$$\varphi_{\varepsilon h}(x,t) = \frac{\varphi_\varepsilon(x,t+h) - \varphi_\varepsilon(x,t)}{h}$$

получаем, что они удовлетворяют уравнению

$$L_\varepsilon \varphi_{\varepsilon h} = L\varphi_{\varepsilon h} + (-1)^{m+1} \Delta^m \varphi_{\varepsilon h} + \ldots = \Phi_{\varepsilon h}(x,t)$$

и используя результаты о гладкости решений задачи (10) –(13) и также априорные оценки (14), (15), получим

$$\|\Phi_{\varepsilon h}\|_{0,D^+} + \|\Phi_\varepsilon\|_{0,D^+} \ge m \int\limits_{D^+} \left\{ \left(D_t^m \varphi_{\varepsilon h}\right)^2 + \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \left| a_{\alpha\beta}(x) - \varepsilon \right| \left(D_x^{2m-1} \varphi_{\varepsilon h}\right)^2 + \varphi_{\varepsilon h}^2 \right\} dD^+ + \|\varphi_{\varepsilon h}\|^2_{m-1,D^+}.$$

В последнем неравенстве, переходя к пределу по $h \to 0$ получим

$$\|\Phi_{\varepsilon t}\|_{0,D^+} + \|\Phi_\varepsilon\|_{0,D^+} \ge m \int\limits_{D^+} \left\{ \left(D_t^m u_{\varepsilon t}\right)^2 + \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \left| a_{\alpha\beta}(x) - \varepsilon \right| \left(D_x^{2m-1} u_{\varepsilon t}\right)^2 + u_{\varepsilon t}^2 \right\} dD^+ + \|u_{\varepsilon t}\|^2_{m-1,D^+}. \qquad (18)$$

На основании неравенств (15), (16) из уравнения (10) мы окончательно получаем:

$$\|f_t\|^2_{0,D^+} + \|f\|^2_{0,D^+} \ge m \|\varepsilon\|^2_{H_{2,L}(D^+)},$$

где константа m не зависит от ε.

Так как последовательность $\{u_\varepsilon(x,t)\}$ равномерно ограничена в пространстве $H_{2,L}(D^+)$, то из нее можно извлечь слабо сходящуюся в $H_{2,L}(D^+)$ последовательность $\{u_{\varepsilon k}\}$ такую, что

$$\{u_{\varepsilon k}\} \to u(x,t) \in H_{2,L}(D^+) \text{ при } \varepsilon_k \to 0,\ k \to \infty .$$

Следовательно, $u(x,t)$ обобщенное решение задачи (1), (7) – (9) и принадлежит пространству $H_{2,L}(D^+)$ и очевидно, что удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в D^+.

Теперь рассмотрим уравнение (1) в области D^-. В этом случае, аналогичным образом ставится краевая задача, а также рассматривается вспомогательная задача.

Краевая задача. Найти решение уравнения (1) в области D^-, удовлетворяющее краевым условиям:

$$\left.\frac{\partial^i u}{\partial n^i}\right|_{S^-} = 0, \quad i = 0,1,\dots,m-1, \tag{19}$$

$$\left.\frac{\partial^i u}{\partial t^i}\right|_{S_4} = \left.\frac{\partial^i u}{\partial t^i}\right|_{S_2} = 0, \quad i = 0,1,\dots,m-1, \tag{20}$$

$$\left.\frac{\partial^m u}{\partial t^m}\right|_{S_2} = 0,. \tag{21}$$

После замены переменных $t' = T - t,\ \ x_n' = -x_n$ все результаты, полученные для областей D^+, легко, аналогичным образом, получаются и для случая D^-. Тогда имеет место следующая теорема

Теорема 3 *(о разрешимости краевой задачи (1), (19) – (21))*. Пусть выполнены условия леммы 1, а также

$$\left|\sum_{|\alpha|,|\beta|=m} D_x^\alpha a_{\alpha\beta}(x) D_x^\beta a_{\beta\alpha}(x)\right| \le M \left|\sum_{|\alpha|,|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x)\right|,$$

$$\sum_{|\alpha|=2m-2} a_\alpha(x,t)\xi^\alpha \le -M|\xi|^{2m-2},\ M > 0,$$

$$\sum_{|\alpha|=2m-2} a_{\alpha t}(x,t)\xi^\alpha \le 0,\ \forall \xi^\alpha = \left(\xi_1^{\alpha_1},\dots,\xi_n^{\alpha_n}\right) \in R^n,\ \ f(x,t),\ f_t(x,t) \in L_2(D^-),$$

$$(-1)^m\left[2K_{2m-1}(x,t) + (1-2m)\frac{\partial K_{2m}}{\partial t}\right] \le -\delta < 0,\ \delta > 0 .$$

Тогда существует и притом единственно регулярное решение задачи (1), (19) – (21) из пространства $H_{2,L}(D^-)$. Доказательство теоремы 3, также проводится аналогично доказательству теоремы 2. Таким образом, мы можем утверждать, что функция $u(x,t)$ является обобщенным решением краевой задачи (1), (19) – (21) из пространства $H_{2,L}(D^-)$ и, следовательно, удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в D^-.

Определение 3. Функцию $u(x,t)\in H_{1,L}(D^+)$ $(u(x,t)\in H_{1,L}(D^-))$ (следуя по [1]) будем называть сильным решением краевой задачи (1), (7) – (9) ((1), (19) – (21)), если существует последовательность функций $\{u_n\}\in C_{L'}(D^+)$ $(\{u_n\}\in C_{L''}(D^-))$ такая, что выполнено равенство

$$\lim_{n\to\infty}\|Lu_n-f\|_{L_2(D^+)}=\lim_{n\to\infty}\|u_n-u\|_{H_{1,L}(D^+)}=0, \lim_{n\to\infty}\|Lu_n-f\|_{L_2(D^-)}=\lim_{n\to\infty}\|u_n-u\|_{H_{1,L}(D^-)}=0,$$

соответственно.

Теперь попытаемся доказать существование сильных решений краевой задачи (1) – (4) в областях D^+ и D^-. Для этого потребуем, чтобы выполнялись условия леммы 1 и теорем 2, 3 и кроме того

$$\left|\sum_{|\alpha|,|\beta|=m} D_x^\alpha a_{\alpha\beta}(x) D_x^\beta a_{\beta\alpha}(x)\right| \le M\left|\sum_{|\alpha|,|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x)\right|,\ x\in D;$$

$$(-1)^m\left[2K_{2m-1}(x,t)+\left|(1-2m)\frac{\partial K_{2m}}{\partial t}\right|\right]\le -\delta<0,\ \delta>0,\ (x,t)\in D.$$

Тогда для любой функции $f(x,t)\in L_2(D^+)$ $(f(x,t)\in L_2(D^-))$ существует и притом единственное сильное решение краевой задачи (1), (7) – (9) ((1), (19) – (21)) из пространства $H_{1,L}(D^+)$ $(H_{1,L}(D^-))$.

Предположим сначала, что функция $f(x,t)$ не только из пространства $L_2(D)$, но и такая, что $f_t(x,t)\in L_2(D)$.

Тогда построим последовательность функций $f_n^+\in W_2^m(D^+)$, $f_n^-\in W_2^m(D^-)$, сходящихся, соответственно, к функциям f^+, f^- в пространстве $L_2(D^+), L_2(D^-)$, соответственно. В таком случае для функций f_n^+, f_n^- существуют сильные решения краевых задач (1), (7) – (9) и (1), (19)–(21) в пространствах $H_{1,L}(D^+)$, $H_{1,L}(D^-)$, соответственно, кроме того, в силу первой априорной оценки леммы 1 имеем: $\|f_n^+\|_{L_2(D^+)}\ge m\|u_n^+\|_{L_{1,L}(D^+)}$, $\|f_n^-\|_{L_2(D^-)}\ge m\|u_m^-\|_{L_{1,L}(D^-)}$. Отсюда следует, что последовательность $\{u_n^+\}$ сходится к некоторой функции $u^+\in H_{1,L}(D^+)$ и эта функция будет по определению сильным решением. Аналогично, можно утверждать, что последовательность $\{u_n^-\}$ сходится к функции $u^-\in H_{1,L}(D^-)$ и эта функция также будет сильным решением задачи (1), (19) – (21).

В дальнейшем, уместно отметить одно важное замечание.

Замечание 1. Пусть функции $u^+(x,t)\in H_{i,L}(D^+)$ и $u^-(x,t)\in H_{i,L}(D^-)$, $i=1,2$. Тогда функция

$$u(x,t)=\begin{cases}u^+(x,t), & (x,t)\in D^+,\\ u^-(x,t), & (x,t)\in D^-\end{cases} \tag{22}$$

будет также принадлежать классу $u(x,t)\in H_{i,L}(D)$, $i=1,2$.

Теорема 4 *(о разрешимости задачи (1) – (4))*. Пусть выполнены условия леммы 1 и теорем 1, 2, 3 для коэффициентов уравнения (1). Тогда для любой функции $f(x,t)$, $f_t(x,t)\in L_2(D)$ существует и притом единственное обобщенное решение задачи (1) – (4) из пространства $H_{2,L}(D)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Науково думка, 1965, 798 с.
2. Врагов В.Н. О постановке и разрешимости краевых задач для уравнений смешанно-составного типа высокого порядка. В кн.: Математический анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск: 1978, с.5-13.
3. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд-во СО АН СССР, 1962, 255 с.
4. Нурмамедов М.А. Первая краевая задача для одного модельного уравнения смешанного типа. // Неклассические уравнения математической физики. Сб. науч.тр./АН СССР, Сиб.отд-ние Ин-т математики. Новосибирск: 1985, с.117-122.
5. Нурмамедов М.А. О некоторых корректных краевых задачах для уравнения смешанного типа с перпендикулярными линиями вырождения. // Некоторые проблемы дифференциальных уравнений и дискретной математики: Меж. ВУЗ. Сб. науч. тр. / Новосибирск Ун-т, 1986, с.104-107.
6. Нурмамедов М.А. Первая краевая задача для уравнения смешанного типа высокого порядка, с меняющимся направлением времени. Тезисы Докладов второго Сибирского Конгресса по фундаментальным и индустриальным прикладные математики. Ин-т математики имени С.Л.Соболева, Сибирск. отд-ние РАН, Новосибирск: 1996, с.104-107.
7. Нурмамедов М.А. О разрешимости смешанной краевой задачи для уравнения неклассического типа высокого порядка. Akad. M.L.Rəsulovun 90 illiyinə həsr olunmuş "Riyazi-fizikanın üsulları" elmi konfransının materialları, Bakı Dövlət Universiteti, Bakı ş., noyabr, 2006, s.147-151.
8. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975, 480 с.
9. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973, 407 с.
10. Чуешев А.В. Об одном линейном уравнении смешанного типа высокого порядка. Сиб. Мат. журн. 2002, 43:2, с. 454-462.

YÜKSƏK TƏRTİBLİ QEYRİ-KLASSİK TƏNLİK ÜÇÜN TÖRƏMƏ İŞTİRAK EDƏN SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN HƏLL OLUNA BİLMƏSİ

M.A.NURMƏMMƏDOV

XÜLASƏ

Çoxölçülü oblastda yüksək tərtibli tənliklərin əmsallara görə tiplərini dəyişməsi ilə sərhəd məsələlərinin tədqiqində müəyyən çətinliklər meydana çıxır. Baxılan məqalədə yüksək tərtib törəmələrin əmsallarının bütün mümkün işarə dəyişməsi ilə əlaqədar olaraq tədqiq olan tənliyə elliptik, cırlaşan elliptik və qarışıq-tərkibli tənliklər sinfi daxil olur, xüsusən zamana görə istiqamətli tip tənliklər sinfi ilə əhatə olunur. "ε- requlyarlaşdırma" və aprior qiymətləndirmələr, həmçinin funksional analiz metodu ilə tənliyin əmsal və sağ tərəfinə müəyyən şərtlər qoymaqla məsələnin həll oluna bilməsi çəkili Sobolev fəzasında isbat olunur.

ON THE SOLVABILITY OF BOUNDARY VALUES PROBLEMS HAVING DERIVATIVES IN CONDITION FOR EQUATION OF NON-CLASSICAL TYPE OF THE HIGHER ORDER

M.A.NURMAMEDOV

SUMMARY

Some difficulties arise in multidimensional regions investigating high-order boundary value problems when coefficients of higher derivatives have some lines of changing type. The coefficients of higher derivatives have all sorts of definition signs, that's why, this equation family include the equations of elliptical, degenerative elliptical, mixed-composite a particularly, changeable time direction types.

The solvability of the boundary value problem in Sobolev's weighted space is proved with the help of the methods of functional analysis, ε – regularizing, α prior estimates α restrictions both on coefficients α the right – side of the equation.